

Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. ESP. EUCLIDEOS

1. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base de \mathbb{R}^3

$$\{(1, 2, 0), (1, 0, 0), (2, 3, -1)\}$$

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar estándar de \mathbb{R}^3 .

Solución: Una base ortogonal por Gram-Schmidt es $\{(1, 2, 0), (4/5, -2/5, 0), (0, 0, -1)\}$ y la base ortogonal sería $\{(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0), (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0), (0, 0, -1)\}$

2. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base de \mathbb{R}^4

$$\{(1, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar estándar de \mathbb{R}^4 .

Solución: Una base ortogonal por Gram-Schmidt es

$$\{(1, 2, 1, 0), (5/6, -1/3, -1/6, 0), (0, 1/5, -2/5, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

y la base ortogonal sería

$$\{(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0), (\sqrt{5}/6, -\sqrt{6}/3\sqrt{5}, -1/\sqrt{6}\sqrt{5}, 0), (0, 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

3. Consideremos el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

Demuestra que es un producto escalar.

Solución: Habría que comprobar las cuatro propiedades del producto escalar, para este producto en particular. Si se va viendo una a una, se ve fácilmente que es producto escalar:

- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- $ku \cdot w = k(u \cdot w)$
- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

donde $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, $w = (x_3, y_3, z_3)$

4. Consideremos el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar habitual y los vectores de \mathbb{R}^3

$$v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 1, 0).$$

Calcula qué ángulo forman entre sí los vectores v_1 y v_2 , los vectores v_2 y v_3 , y comprueba la desigualdad de Cauchy-Schwartz usando los vectores v_1 y v_3 .

Solución: Tenemos que el ángulo que forman v_1 y v_2 es 90 grados porque su producto escalar es 0. El ángulo que forman v_2 y v_3 es aproximadamente 54 grados, ya que obtenemos que el coseno del ángulo es $1/\sqrt{3}$. La comprobación de la desigualdad sería sustituir por los valores que es $|2| \leq \sqrt{6}$

5. Consideremos el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar habitual y los vectores de \mathbb{R}^3

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 1, 0).$$

Sea S el subespacio de \mathbb{R}^3 generado por v_1, v_2, v_3 . Calcula la proyección ortogonal del vector $w = (1, 0, 0)$ sobre S .

Solución: La base ortonormal es $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2}/\sqrt{3})\}$ y la proyección ortogonal sobre el subespacio sería el vector $(1/2, 1/2, 0)$

6. En \mathbb{R}^4 con el producto escalar habitual, calcula la proyección ortogonal del vector $v = (1, 3, -1, 4)$ sobre el subespacio generado por $\{(2, 1, 0, 1), (0, 3, 1, 1)\}$.

Solución: La base ortonormal es $\{(2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0, 1/\sqrt{6}), (-4/5\sqrt{3}, 7/5\sqrt{3}, \sqrt{3}/5, 1/5\sqrt{3})\}$ y la proyección ortogonal sobre el subespacio sería el vector $(51/25, 159/50, 18/25, 87/50)$

7. En \mathbb{R}^4 con el producto escalar habitual, calcula la proyección ortogonal del vector $v = (1, 0, 0, 2)$ sobre el subespacio

$$S = \{(x, y, z, t) \mid \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}\}$$

Solución: Primero hay que obtener una base del espacio subespacio S que es

$$\{(2, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

, que es ortogonal. La base ortonormal es $\{(2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ y la proyección ortogonal es del vector v es $(2/3, -1/3, 1/3, 2)$

8. Calcula soluciones aproximadas por mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales $Ax = b$ y halla el error cometido al tomar la solución aproximada.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $x = (3, 2)$

b) $x = (-4, 3)$

c) $x = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$

d) $x = (5 - x_3, x_3 - 3, x_3)$

e) $x = (11, -9, 6)$

9. Un cierto experimento produce los datos empíricos (x_i, y_i) siguientes: $(1, 1.8)$, $(2, 2.7)$, $(3, 3.4)$ y $(4, 4.38)$. Si los resultados deben corresponder a una función de la forma $y = a_1 + a_2x$, calcular por mínimos cuadrados la función de esa familia que mejor ajusta a los datos empíricos.

Solución: Se aplica la fórmula y la recta que mejor aproxima es $y = 0,844x + 0,96$